EXERCICES SUR LES MATRICES

Classification Thèmes de MégaMaths

Docs de Dany-Jack MERCIER

Deug 1e année : 1 TD sur le calcul matriciel. Matrices comme tableaux de nbrs, calcul matriciel numerique, addition, mult., exos sur les syst. linéaires (méthode du pivot), inversion des mat. carrées. ©FEV 94

Matrices

1) $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,p) = \mathcal{M}(n,p) = \mathcal{M}$ = ens. des mat. carrées n lignes, p colonnes, à coeff. réels.

= tableaux rectangulaires de réels s'il s'agit de matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

(p colonnes, n lignes)

$M = (a_{ij})$ en règle générale : i = indice des lignes
j = indice des colonnes

2) Opérations dans $\mathcal{M}$

$M = (a_{ij})$
$N = (b_{ij})$

On pose : $M+N = (c_{ij})$ où $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\lambda M = (\lambda b_{ij})$

ex : $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 14 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 14 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$

Th : $(\mathcal{M}, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, ie :
1) $\forall M \in \mathcal{M}$ $\quad 1.M = M$
2) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\quad \forall M \in \mathcal{M}$ $\quad \lambda(\mu M) = (\lambda\mu)M$
3) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\quad \forall M \in \mathcal{M}$ $\quad (\lambda+\mu)M = \lambda M + \mu M$
4) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \forall M, N \in \mathcal{M}$ $\quad \lambda(M+N) = \lambda M + \lambda N$

ex1 : Existe-t'il une matrice X tq $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$?

et tq : $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -7 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 10 & -4 & 0 \end{pmatrix}$?

ex2 : Trouver les matrices X et Y tq

$$\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & i \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & 2i \end{pmatrix} \end{cases}$$ si elles existent.

ex3 : Trouver les matrices X, Y, Z tq :

$$\begin{cases} X - Y + 2Z = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \\ -X + Y - Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \\ -3X + Z = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

* Produit de matrices :

Exemples : ①

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -11 & 10 \end{pmatrix}$$

Le produit de matrices s'effectue "lignes par colonnes".

Ainsi, si $M = (a_{ij})$, $N = (b_{ij})$,

$$MN = (c_{ij}) \quad \text{où} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

ex4 : Calculer les produits suivants

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i & i \\ 3 & 2i & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

⚠ le produit n'est pas commutatif !

Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, calculer ${}^tX \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} X$ (...)

Th 2 $\times$ = produit interne de mat. $\mathcal{M}(n,n)$ = matrices <u>carrées</u> d'ordre n.

$(\mathcal{M}(n,n), +, \times)$ est un anneau (CANS-AD) <u>non commutatif</u>, mais unitaire, d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Comme dans tout anneau :

Th 3 : Formule du binôme de Newton.

Si A et B sont 2 mat. carrées qui <u>commutent</u> (ie $AB = BA$), alors

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}$$

<u>ex 5</u> : a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n

b) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $T^3 = 0$

puis calculer A^n.

(Sol : $A^n = (I+T)^n = I + nT + \frac{n(n-1)}{2} T^2$)

<u>Moralité de l'histoire</u> :

<u>Th 4</u> : $(\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,n), +, \times, \cdot)$ est une <u>algèbre</u> sur $\mathbb{R}$, ie (par déf) :

1) $(\mathcal{M}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-ev

2) $(\mathcal{M}, +, \times)$ est un anneau

3) <u>Compatibilité</u> : $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall M, N \in \mathcal{M}\quad (\lambda M) \times N = \lambda (M \times N) = M \times (\lambda N)$

3) Systèmes linéaires (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

C'est :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_p \end{cases} \quad (S)$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$ donné

$b_{j} \in \mathbb{R}$ donnés

ex 6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} 3x + y - 5z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

* Écriture de (S) sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}}_{B}$$

$$MX = B$$

Déf : $M \in \mathcal{M}(n,n)$ est inversible ssi il existe $N \in \mathcal{M}(n,n)$ tq
$$MN = NM = I$$
On note alors $N = M^{-1}$

ex 7 : Chercher si $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible, et, si oui, calculer son inverse.

Donné NC

Sol : $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3a+7b=1 \\ 2a+4b=0 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l} 3c+7d=0 \\ 2c+4d=1 \end{array}\right.$

(...) NB : $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible ssi $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad-bc \neq 0$, et alors
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$ (...) à vérifier

* Si M est inversible, le système $MX = B$ se résout de façon unique pour tout B :

$$MX = B \Leftrightarrow M^{-1}(MX) = M^{-1}B$$
$$\Leftrightarrow X = M^{-1}B$$

En fait, on a même le :

Th 5 : $\sim$ entre

1) M est une matrice inversible

2) Pour tout $B \in \mathcal{M}(n,1)$, il existe une et une seule solution $X \in \mathcal{M}(n,1)$ au système $MX = B$

Dans ce cas, le système $MX = B$ est dit "système de Cramer"

preuve : 1) $\Rightarrow$ 2) a été fait ci-dessus.

2) $\Rightarrow$ 1) Prenons successivement $B = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{E_1}$, puis $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{E_2}$, ..., puis $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{E_n}$

Il existe à chaque fois $X_1, X_2, \dots, X_n$ tq $MX_i = E_i$

Comme le produit de matrices s'effectue "ligne par colonne", on aura :

$$M\underbrace{[X_1, \dots, X_n]}_{} = [E_1, \dots, E_n]$$

‖

matrice $n\times n$ dont les colonnes sont les X_j
Notons là N

soit : $\boxed{MN = I}$

M est inversible à droite, d'inverse $N = [X_1, \dots, X_n]$

* Il reste à prouver que $NM = I$:

2) et la méthode ci-dessus prouvent que

$$\forall B \in \mathcal{M}(n\times n) \quad \exists! X \in \mathcal{M}(n\times n) \quad MX = B \qquad (*)$$

(travailler colonne par colonne)

Mais alors :

$$\begin{cases} MI = M \\ M(NM) = (MN)M = M \end{cases}$$

montrent que I et NM sont toutes les 2 solution de l'équation $MX = B$. L'unicité de la solution de $(*)$ entraîne :

$$\boxed{NM = I}$$

* Ccl : $MN = NM = I$ et M est inversible.

CQFD

ex 8 : Résoudre le système en (x, y, z)

$$\begin{cases} 3x - y + z = X \\ x + y - z = Y \\ -x + 2y + z = Z \end{cases}$$

En déduire que $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, et exhiber son inverse N. Vérifier enfin que $MN = NM = I$.

(Sol : T Matrice. On trouve $N = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & -5/12 & 1/3 \end{pmatrix}$)

4) Méthode du pivot de Gauss

But : Opérations élémentaires sur les lignes pour se ramener à un système linéaire triangulaire facile à résoudre.
Procédé systématique permettant de conserver l'équivalence.

Opérations Elémentaires :

$l_i \leftrightarrow l_j$: échange de lignes

$l_i \leftarrow \lambda l_i$: multiplication d'1 ligne par $\lambda \in \mathbb{R}^*$

$l_i \leftarrow l_i + \lambda l_j$: ajout à l_i de λ fois l_j

Pour en savoir plus : Guinin (Algèbre I) TB "Précis de Mathématiques", Ramis I (dur)

Exemple : Résoudre

$$\begin{cases} x - 5y + z = X \\ x + y - 2z = Y \\ x + 2y - 3z = Z \end{cases}$$

(X, Y, Z) donnés

$$\begin{cases} x - 5y + z = X \\ 6y - 3z = Y - X \\ 7y - 4z = Z - X \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 5y + z = X \\ 6y - 3z = Y - X \\ z = \frac{1}{3}(-X + 7Y - 6Z) \end{cases}$$

puis on remplace, en remontant, pour finalement obtenir :

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3}X + \frac{13}{3}Y - 3Z \\ y = -\frac{1}{3}X + \frac{4}{3}Y - Z \\ z = -\frac{1}{3}X + \frac{7}{3}Y - 2Z \end{cases}$$

c) En déduire, encore, l'inverse de $M = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ et vérifier par le calcul.

ex9 : Calculer les inverses des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ex10 : Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ 3x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

ex11 : Résoudre et discuter suivant la valeur du paramètre λ :
(T Systèmes linéaires)

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{cases}$$

ex12 : Résoudre les systèmes suivant par la méthode du pivot de Gauss :

a) $\begin{cases} 2x + 4y - z = 3 \\ 5y + 3z = 7 \\ x - 2y + z = -8 \end{cases}$ b) $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ où $M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -3 & 7 & -3 \end{pmatrix}$

T Systèmes linéaires. Sol : a) $(x,y,z) = (-3, 2, -1)$ b) $(x,y,z) = (1, \frac{5}{11}, -\frac{3}{11})$

5) Un habillage de la méthode du pivot : l'habillage matriciel.

Voir Guénin I, dernier chapitre : c'est très bien exposé et justifié.

exemple : Inverser la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

On opère par op. élémentaires sur les lignes seulement.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\ell_2 - 2\ell_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & -14 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$14\ell_3 + \ell_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & -14 & 4 \\ 0 & 0 & 46 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 46\ell_1 + \ell_3 \rightarrow \\ 46\ell_2 - 4\ell_3 \rightarrow \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 46 & 322 & 0 \\ 0 & -644 & 0 \\ 0 & 0 & 46 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 44 & 1 & 14 \\ -84 & 42 & -56 \\ -2 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

$$644\ell_1 + 322\ell_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 29624 & 0 & 0 \\ 0 & -644 & 0 \\ 0 & 0 & 46 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1288 & 14168 & -9016 \\ -84 & 42 & -56 \\ -2 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1288}{29624} & \frac{14168}{29624} & -\frac{9016}{29624} \\ \frac{84}{644} & \frac{-42}{644} & \frac{-56}{644} \\ -\frac{2}{46} & \frac{1}{46} & \frac{14}{46} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{23} & \frac{11}{23} & \frac{-7}{23} \\ \frac{3}{23} & \frac{-3}{46} & \frac{-2}{23} \\ -\frac{1}{23} & \frac{1}{46} & \frac{7}{23} \end{pmatrix} = M^{-1}$$

FIN

→ Vérifiez que $M.M^{-1} = I$ (...)

a) Résoudre le système en (x, y, z) :

$$\begin{cases} 3x - y + z = X \\ x + y - z = Y \\ -x + 2y + z = Z \end{cases}$$

b) En déduire l'inverse N de la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Vérifier, par le calcul, que $MN = NM = I$

---

a) $(1)+(2) \Rightarrow \quad x = \frac{1}{4}(X+Y)$

$(2)+(3) \Rightarrow \quad y = \frac{1}{3}(Y+Z)$

Enfin $z = x + y - Y = \frac{1}{4}(X+Y) + \frac{1}{3}(Y+Z) - Y$

$= \frac{1}{4}X - \frac{5}{12}Y + \frac{1}{3}Z$

Ainsi :
$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}X + \frac{1}{4}Y \\ y = \frac{1}{3}Y + \frac{1}{3}Z \\ z = \frac{1}{4}X - \frac{5}{12}Y + \frac{1}{3}Z \end{cases}$$

et le système est de Cramer.

b) D'après a), $\quad N = M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{12} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

c) facile

(inspiré du Gueysanne 277 p 382)

> Soit M une matrice 3×3 de rang 1. Montrer que les valeurs propres de M sont : 0 avec la multiplicité 2, et $\operatorname{tr} M$ avec la multiplicité 1.

M est semblable à $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et il suffit de voir que

les valeurs propres de N, qui sont celles de M, sont :

$a = \operatorname{tr} N = \operatorname{tr} M$ avec la multiplicité 1

0 " " 2.

CQFD

> Si M est une matrice qui permute avec toutes les matrices symétriques, alors M est une matrice scalaire (ie $M = \lambda I$).
> En déduire que le centre de $\mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des homothéties vectorielle de E (où E est un ev de dimension finie sur le corps commutatif K)

Posons $E_{k\ell} = (\delta_{ik}\delta_{j\ell})_{i,j} = \begin{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix}$ (1 à la k-ligne, ℓ-colonne)

Il suffit de faire permuter M avec les matrices E_{kk} et $F_{k\ell} \doteq E_{k\ell} + E_{\ell k}$ $(k \neq \ell)$ pour obtenir $M = \lambda I$:

* $ME_{kk} = E_{kk}M$ s'écrit $\forall i,j \quad \sum_t a_{it} e_{tj} = \sum_t e_{it} a_{tj}$ (où $M = (a_{ij})_{i,j}$)

pour $i = k$ et $j \neq k$, on aura $0 = a_{kj}$, et M sera diagonale : $M = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$

* $MF_{k\ell} = F_{k\ell}M$ s'écrit $\sum_t a_{it} b_{tj} = \sum_t b_{it} a_{tj} \quad \forall i,j$

Soit $b_{ij} \neq 0$ ssi $(i,j) = (k,\ell)$ ou (ℓ,k). Prenons $(i,j) = (k,\ell)$. L'égalité précédente s'écrit :

$$\underbrace{\sum_t a_{kt} b_{t\ell}}_{a_{kk}} = \underbrace{\sum_t b_{kt} a_{t\ell}}_{a_{\ell\ell}}$$

Donc $M = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{11} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{11} \end{pmatrix} = a_{11} I$.

* On déduit alors que $Z(\mathcal{L}(E)) = \{ \lambda \, Id_E \,/\, \lambda \in \mathbb{K} \}$

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Démontrer par récurrence que $J^n = 3^{n-1} J$ pour $n \geq 1$.

b) Calculer A^n où $A = 2I - J$. On montrera l'existence de 2 suites (u_n) et (v_n) telles que $A^n = u_n I + v_n J$, puis on exprimera u_n et v_n en fonction de n

---

a) Évident si $n=1$. Au rang $n+1$:

$$J^{n+1} = J(3^{n-1}J) = 3^{n-1}.J^2 = 3^{n-1}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3^n J \quad \text{oui}$$

b) A^n s'exprimera, grâce à la formule du binôme de Newton (qui s'applique ici car I et J commutent), à l'aide de I et des puissances de J qui se ramènent toutes à J grâce au a). Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists u_n, v_n \qquad A^n = u_n I + v_n J$$

Une relation de récurrence liant u_n et v_n est facile à obtenir :

$$A^{n+1} = u_{n+1} I + v_{n+1} J = (u_n I + v_n J)(2I - J)$$
$$= 2u_n I + (\underbrace{2v_n - u_n - v_n.3}_{-u_n - v_n})J$$

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n \\ v_{n+1} = -u_n - v_n \end{cases} \quad \text{avec } (u_1, v_1) = (2, -1)$$

On déduit $\boxed{u_n = 2^{n-1} u_1 = 2^n}$ et $v_{n+1} = -v_n - 2^n$.

D'où $v_n = -2^{n-1} - v_{n-1}$

$= -2^{n-1} + 2^{n-2} + v_{n-2}$

$= -2^{n-1} + 2^{n-2} - 2^{n-3} - v_{n-3}$

$= \cdots = \underbrace{-2^{n-1} + 2^{n-2} - 2^{n-3} + \dots + (-1)^{n-1} 2}_{} + (-1)^{n-1} \underbrace{v_1}_{=-1}$

somme des $n-1$ termes d'une prog. géom. de 1er terme -2^{n-1} et de raison $-\frac{1}{2}$.

C'est $-2^{n-1} . \dfrac{1-(-\frac{1}{2})^{n-1}}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{1}{3}(-2^n + 2(-1)^{n+1})$

Finalement :

$$v_n = \frac{-2^n + 2(-1)^{n+1}}{3} + (-1)^n$$

$$\boxed{v_n = \frac{(-1)^n - 2^n}{3}}$$

<u>2-méthode</u> : Utiliser la formule du binôme et $J^n = 3^{n-1}J$:

$$A^n = (2I - J)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, 2^{n-k} \underbrace{(-J)^k}_{(-1)^k \cdot 3^{k-1} J \text{ si } k \geq 1}$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k \, 2^{n-k} 3^{k-1} \right)}_{v_n} J + \underbrace{2^n}_{u_n} I$$

On reconnait $v_n = \frac{1}{3} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_n^k \, 2^{n-k} (-3)^k}_{= (2-3)^n - 2^n} = \frac{(-1)^n - 2^n}{3}$.

CQFD

a) Soit M une matrice carrée $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Notons $\chi_M(X) \doteq \det(M - XI)$ le polynôme caractéristique de M. Montrer que ce polynôme est indépendant de la classe de similitude de la matrice M
(ie $\chi_M(X) = \chi_N(X)$ dès que $N = P^{-1}MP$ où P est une mat. car. inv.)

b) Si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (ou de $\mathbb{C}^n$), notons $M = Mat(f; e)$ sa matrice dans une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$, et :

$$M = Mat(f; e) = (a_{ij})_{i,j}$$

Vérifier que le <u>déterminant</u> et la <u>trace</u> de $Mat(f; e)$ (définie par $\mathrm{tr}\, M \doteq a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$) ne dépendent pas de la base e. On peut ainsi définir le déterminant et la trace d'un endomorphisme (soit det f et tr f)

c) Le coefficient de X^{n-2} de $\chi_M(X)$ permet d'introduire un nouvel invariant ne dépendant que de f. Quel est-il ? Expliciter-le lorsque

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

---

a) $\chi_M(X) = \det(M - XI) = \det(P^{-1}(M - XI)P) = \det(P^{-1}MP - XI) = \det(N - XI) = \chi_N(X)$

b) Il faut préciser certains coefficients de $\chi_M(X)$:

$$\chi_M(X) = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} - X & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - X & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - X \end{vmatrix}}_{\text{matrice } (x_{ij})_{i,j}}$$

est un polynôme de degré n en X.

On a : $\chi_M(X) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, x_{1\sigma(1)}\, x_{2\sigma(2)} \ldots x_{n\sigma(n)}$

$$\chi_M(X) = \underbrace{x_{11}x_{22}\cdots x_{nn}}_{=(a_{11}-X)(a_{22}-X)\cdots(a_{nn}-X)} + \underbrace{\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n\setminus\{Id\}} \varepsilon(\sigma)\, x_{1\sigma(1)}\cdots x_{n\sigma(n)}}_{} \qquad (*)$$

polynôme de degré $\leq n-2$ en X
(car X ne figue pas dans les termes non diagonaux de $(x_{ij})_{i,j}$)

Donc :

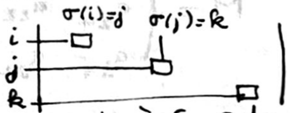
$$\chi_M(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}\underbrace{(a_{11}+\dots+a_{nn})}_{\operatorname{tr} M} X^{n-1} + \dots + \underbrace{\det M}_{(\text{faire } \chi_M(0)=\det M)}$$

D'après le a), $\det M$ et $\operatorname{tr} M$ seront bien indépendants de la classe de similitude de la matrice M, ie ne dépendront que de f.

c) On utilise $(*)$. Le terme en X^{n-2} de $x_{11}x_{22}\cdots x_{nn}$ est $(-1)^n\left(\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ii}a_{jj}\right) X^{n-2}$
(cf 2nd polyn. sym. él. de $a_{11},\dots,a_{nn}$).

* Quel est le terme en X^{n-2} dans $\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n\setminus\{Id\}} \varepsilon(\sigma)\, x_{1\sigma(1)}\cdots x_{n\sigma(n)}$? Si $\sigma(i) \doteq j \neq i$, donc

$\sigma(j)\neq j$ (car σ bijective).



← idée

\- Si $\sigma(j)\neq i$, $\sigma(j)=k\notin\{i,j\}$ et le terme en x_{kk} est irrémédiablement perdu pour $x_{1\sigma(1)}\cdots x_{n\sigma(n)}$, autrement dit : $x_{1\sigma(1)}\cdots \underbrace{x_{i\sigma(i)}}\cdots \underbrace{x_{j\sigma(j)}}\cdots \underbrace{x_{k\sigma(k)}}\cdots x_{n\sigma(n)}$ → Hors diagonale principale

sera de degré $\leq n-3$, et ne nous intéresse pas.

\- Le terme en X^{n-2} de $\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n\setminus\{Id\}} \varepsilon(\sigma)\, x_{1\sigma(1)}\cdots x_{n\sigma(n)}$ proviendra donc des permutations σ du type "transposition" : $\sigma = \tau_{ij}$.

Calculons :

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{T}} \varepsilon(\sigma)\, x_{1\sigma(1)}\cdots x_{n\sigma(n)} = \sum_{\substack{1\leq i<j\leq n\\ \sigma=\tau_{ij}}} (-1)\, x_{1\sigma(1)}\cdots x_{n\sigma(n)} = \sum_{1\leq i<j\leq n} -a_{ij}a_{ji} \underbrace{\prod_{k\notin\{i,j\}}(a_{kk}-X)}_{(-1)^{n-2}X^{n-2}+\dots}$$

($\mathcal{T}$ = ens. des transpositions)

$$= (-1)^{n-1}\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}a_{ji} \,.\, X^{n-2} + \dots$$

Ccl : Le terme en X^{n-2} de $\chi_M(X)$ sera $\underbrace{\left[(-1)^n \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ii}a_{jj} + (-1)^{n-1}\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}a_{ji}\right]}_{} X^{n-2}$

invariant ne dépendant donc que de f.

* Si $n=3$, on obtient l'invariant : $a_{12}a_{21}+a_{13}a_{31}+a_{23}a_{32} - (a_{11}a_{22}+a_{11}a_{33}+a_{22}a_{33})$.